Grundlage des Integralkalküls Erster Band *

Vorzumerkendes über die Integralrechnung im Allgemeinen †

Leonhard Euler

§1 Die Integralrechnung ist die Methode, aus einer gegebenen Relation der Größen selbst zu finden, und die Operation, durch die das geleitet wird, pflegt Integration genannt zu werden.

Korollar 1

§2 Während also die Differenzialrechnung lehrt aus einer gegebenen Relation variabler Größen die Relation der Differentiale zu finden, liefert die Integralrechnung die inverse Methode.

Korollar 2

§3 So wie in der Analysis zwei Operationen einander immer entgegengestellt sind, wie z.B. die Subtraktion der Addition, die Division der Multiplikation, das Ziehen von Wurzeln der Erhebung zu Potenzen, so ist auch auf die gleiche Weise die Integralrechnung der Differentialrechnung entgegengestellt.

---

*Originaltitel: „Institutionum calculi integralis volumen primum in quo methodus integrandi a primis principiis usque ad integrationem aequationum differentialium primi gradus pertractatur. Auctore Leonhardo Eulero acad. scient. Borussiae directore vicennali et socio acad. Petrop. Parisin, et Londin.“, erstmals publiziert in „*Petropoli impensis academiae imperialis scientiarum* 1768“, Nachdruck in „*Opera Omnia*: Series 1, Volume 11“, Eneström-Nummer E342

†Originaltitel: “Praenotanda de calculo integrali in genere“, erstmals publiziert in „*Petropoli impensis academiae imperialis scientiarum* 1768, pp. 24-44 “, Nachdruck in „*Opera Omnia*: Series 1, Volume 11, pp. 5-19“, übersetzt von: Alexander Aycock, Textsatz: Arseny Skryagin, im Rahmen des Projektes „Euler-Kreis Mainz“

Korollar 3

§4 Nachdem irgendeine Relation zwischen der beiden Variablen Größen x und y vorgelegt wurde, wird in der Differentialrechnung die Methode angegeben, das Verhältniss der Differentiale $\mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y$ zu finden; wenn aber umgekehrt aus diesem Verhältnis der Differentiale selbst die Relation der Größen x und y zu bestimmen ist, wird diese Arbeit der Integralrechnung zugeteilt.

Bemerkung 1

§5 In der Differentialrechnung habe ich schon bemerkt, dass die Frage über die Differentiale nicht absolut von der relativ zu verstehen ist, so dass, wenn y irgendeine Funktion von x war, nicht so über Differential $\mathrm{d}y$ selbst wie sein Verhältnis zum Differential $\mathrm{d}x$ zu bestimmen ist. Weil nämlich alle Differentiale per se gleich 0 sind, was für eine Funktion y auch immer von x war, es ist immer $\mathrm{d}y = 0$ und so könnt weiter überhaupt nichts gesucht werden. Aber die Frage muss für gewöhnlich so vorgelegt werden, dass während x einen unendlich kleinen und sogar verschwindenden Zuwachs $\mathrm{d}x$ erfährt , man das Verhältnis des Zuwachses der Funktion y, welchen sie annehmen wird, zu diesem $\mathrm{d}x$ bestimmt, auch wenn nämlich jeder der beiden $= 0$ ist, geht dennoch ein gewisses Verhältnis zwischen ihnen hervor, welches eigentlich in der Integralrechnung untersucht wird. Wenn so $y = xx$ war, zeigt man der Differentialrechnung, dass $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x$ ist und dass dieses Verhältnis der Zuwächse nicht wahr ist, wenn nicht der Zuwachs $\mathrm{d}x$, aus dem $\mathrm{d}y$ entsteht, gleich 0 gesetzt wird. Aber dennoch, nachdem diese wahre Bezeichnung der Differentiale vermerkt wurde, können allgemeine Sprechweise, in denen die Differentiale quasi als absolut bezeichnet werden, toleriert werden, so lange man sie immer zumindest im Geist auf die Weisheit bezieht. Mit Recht sagen wir also, wenn $y = xx$ ist, dass $\mathrm{d}y = 2x\mathrm{d}x$ sein wird, auch wenn es nicht falsch wäre, wenn jemand $dy = 3x\mathrm{d}x$ oder $\mathrm{d}y = 4x\mathrm{d}x$ sagen würde, weil ja wegen $\mathrm{d}x = 0$ und $\mathrm{d}y = 0$ diese Gleichheit in gleicher Weise beständen. Aber allein die erste mit dem wahren Verhältnis $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x$ ist verträglich.

Bemerkung 2

§6 So wie die Differentialrechnung beiden den den Engländern Fluxionsmethode genannt wird, so pflegt die Integralrechnung von ihnen inverse

Fluxionsmethode genannt zu werden. Was wir nämlich variable Größen nennen, bezeichnen die Engländer mit dem besser geeigneten Namen fließende Größen und nennen deren unendlich kleine kleine oder verschwindende Zuwächse Fluxionen, so dass Fluxionen für dasselbe sind, wie für aus Differentiale. Diese verschiedene Sprechweise hat sich schon so eingebürgert, dass eine Vereinheitlichung kaum zu erwarten ist, ich freilich würde den Engländern bei den Formeln in der Redeweise folgend, aber die Bezeichnungen, die wir benutzen, scheinen den Bezeichnungen jener weit vorzuziehen zu sein. Aber weil schon so viele auf jede der beiden Weisen geschriebenen Bücher erschienen sind, hätte eine Vereinheitlichung dieser Art keinen Nutzen.

Definition 2

§7 Weil das Differential irgendeiner Funktion von x ein Differential dieser Art hat Xdx, nachdem eine solche Differentialformel Xdx vorgelegt wurde, in welcher X irgendeine Funktion x sein, nennt man jene Funktion, deren Differential $= Xdx$ ist, das Integral von dieser und es pflegt mit dem voran gestellten Zeichen $\int$ bezeichnet zu werden, so das $\int Xdx$ die variable Größe bezeichnet, deren Differential Xdx ist

Korollar 1

§8 So wie also das Integral der vorgelegten Differentialformel Xdx oder die Funktion von x, deren Differential $= Xdx$ ist, die mit diesem Schriftzeichen $\int Xdx$ bezeichnet wird, gefunden werden muss, ist in der Integralrechnung zu erklären.

Korollar 2

§9 Wie also der Buchstabe d das Zeichen für die Differentiation ist, so benutzen wir den Buchstaben S für das Zeichen der Integration und so sind diese zwei Zeichen einander entgegengesetzt und heben sich quasi auf, natürlich wird $\int Xdx = X$ sein, weil die Größe bezeichnet wird, deren Differential dx ist, die natürlich X ist.

KOROLLAR 3

§10 Weil also die Differentiale dieser Funktionen von x

$$x^2, \quad x^n, \sqrt{aa-xx} - 2n\mathrm{d}x, \quad nx^{n-1}\mathrm{d}x, \quad \frac{-x\mathrm{d}x}{\sqrt{aa-xx}}$$

sind, ist unter Verwendung des Integrationszeichens klar, dass

$$\int x\mathrm{d}x = xx, \quad \int nx^{n-1}\mathrm{d}x = x^n, \quad \int \frac{-x\mathrm{d}x}{\sqrt{aa-xx}} = \sqrt{aa-xx}$$

sein wird, woher man den Nutzen dieses Zeichens deutlich erkennt.

BEMERKUNG 1

§11 Hier scheint nur eine einzige Variable Größe in die Rechnung einzugehen, obwohl wir dennoch festlegen, dass so in der Differentialrechnung wie in der Integralrechnung immer das Verhältnis zweier oder mehrerer Differentiale betrachtet wird. Aber auch wenn hier nur eine variable Grösse x auftaucht, werden dennoch in Wirklichkeit zwei betrachtet, die andere ist nämlich jene Funktion selbst, deren Differential wir angenommen haben $X\mathrm{d}x$, zu sein. Wenn diese mit dem Buchstaben y bezeichnet wird, wird $\mathrm{d}y = X\mathrm{d}x$ oder $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = X$ sein, so dass hier insgesamt das Verhältnis $\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$ vorgelegt, welches $= X$ ist, und daher wird $y = \int X\mathrm{d}x$ sein; dieses Integral aber ist nicht anzusehen, so aus dem Differential $X\mathrm{d}x$ selbst welches natürlich $= 0$ ist, wie aus seinem Verhältnis zu $\mathrm{d}x$ gefunden zu werden.Im Übringen pflegt dieses Zeichen $\int$ mit dem Namen Summe ausgestattet zu werden, weil es aus der wenig passenden Auffassung, nach welcher das Integral als die Summe alle Differentiale betrachtet wird, entstanden ist; und es kann nicht mit größerem Recht zugelassen werden, als für gewöhnlichen Linien aus Punkten zu verstehen, aufgefasst zu werden pflegen.

BEMERKUNG 2

§12 Aber die Integralrechnung erstreckt sich um Vieles weiter als auf zu integrierende Formeln dieser Art, die eine einzige Variable umfassen. Wie nämlich hier die Funktion einer einzigen Variable x aus einer gegebenen Form des Differentials untersucht wird, so muss die Integralrechnung auch auf zu untersuchende Funktionen zweier oder mehrerer Variablen ausgedehnt werden, nachdem eine gewisse Relation die Differentiale erster Ordnung beschränkt, sondern es müssen auch Vorschriften angegeben werden, mit der Hilfe Funktionen so einer wie zweier oder mehreren Variablen untersucht werden können, nachdem eine gewisse Relation von Differentiation zweiter oder einer gewissen höheren Ordnung gegeben war. Deswegen haben wir die Definition der Integralrechnung so aufgebaut, dass sie alle Untersuchungen dieser Art in sich umfassen würde; es müssen nämlich die Differentiale jeder Ordnung verstanden werden und ich habe die Bezeichnung "Relation", die zwischen ihnen vorgelegt wird, benutzt, damit er sich weiter erstrecken würde als die Bezeichnung "Verhältnis", das nur den Vergleich zweier Differentiale zu bezeichnen scheint. Aus dieser Dingen also werden wir die Aufteilung der Integralrechnung festlegen können.

DEFINITION 3

§13 Die Integralrechnung wird in zwei Teile gefaßt, von denen der erste die Methode angibt, die Funktion einer Variable aus einer bestimmen gegebenen Relation zwischen ihnen Differentialen so erster wie höherer Ordnungen zu finden. Der andere Teil aber entält die Methode, eine Funktion zweier oder mehrerer Variablen zu finden, nachdem die Relation zwischen ihnen Differentialen entweder erster oder einer gewißen höheren Grades vorgelegt worden war.

KOROLLAR 1

§14 Je nachdem ob also die aus der gegebenen Relation der Differentiale zu findende Funktion entweder eine Variable oder zwei oder mehrere Variablen umfaßt, wird daher die Integralrechung angenehm in zwei grundlegende Teile gefaßt, welches zu erläuternden wir zwei Bücher widmen wollen.

KOROLLAR 2

§15 Die Integralrechnung beschäftigt sich also immer mit dem Fund von Funktionen entweder einer oder mehreren Variablen, nachdem natürliche eine gewiße Relation zwischen ihren Differentialen erster oder einer gewißen höheren Ordnung vorgelegt worden war.

Bemerkung 1

§16 Weil wir hier den ersten Teil der Integralrechnung in der Untersuchung von Funktionen einer Variable aus einer gegebenen Relation der Differentiale festlegen, scheinen mehrere Anteile für die Anzahl der in die Funktion eingehenden Variablen festgelegt werden zu müssen, so dass der zweite Teil Funktionen zweier Variablen, der dritte drei, der vierte vierer etc. umfaßt. Aber für diese letzten Teile wird fast dieselbe Methode erfordert, so dass, wenn das Finden von Funktionen, die zwei Variablen involvieren, in der Macht stand, der Weg zu denen, die mehrere Variablen haben, hinreichend geebnet worden ist; daher verbinden wir den Fund von Funktionen solcher Art, die zwei oder mehrere Variablen enthalten, angenehm und legen daher einen einzigen im zweiten Buch zu behandelnden Teil der Integralrechnung fest.

Im Übrigen ist dieser andere Teil in den Grundlagen noch nie behandelt worden, auch wenn sein Nutzen in der Mechanik und besonders in der Lehre der Fluide sehr großist. Deshalb, weil in dieser Art außer den ersten Grundsteinen kaum irgendetwas erforscht worden ist, wird unserer zweites Buch über die Integralrechnung sehr ohne Früchte sein und außer der Mitteilung der Dinge, die noch nicht verfaßt werden, wird wenig zu erwarten sein; aber dies selbst scheint dem Zuwachs der Wissenschaft viel beizutragen.

Definition 4

§17 Jedes der beiden Bücher über die Integralrechnung wird angenehm in Teile für diesen Grad der Differential unterteilt, aus deren Relation die gesuchte Funktion untersucht werden muss. So beschäftigt sich der erste Teil mit der Relation der Differentiale erstes Grades, der zweite mit der Relation der Differentiale zweiter Grades, wozu auch die Differentiale höheren Grade, die noch zu untersuchen sind, wegen deren Einfachheit gezählt werden können.

Korollar 1

§18 Jedes der beiden Bücher wird also aus zwei Teilen bestehen, in denen erster die Relation, die zwischen Differentiale ersten Grades vorgelegt wurde, betrachtet werden wird, im zweiten aber werden Integration solcher Art auftauchen, wo eine Relation zwischen Differentialen zweites oder höherer Grade vorgelegt wird.

Korollar 2

§19 Im ersten Teil des ersten Buches wird also eine zu findende Funktion der Variable x solcher Art vorgelegt, da nachdem die Funktion $= y$ und $\frac{dy}{dx} = p$ gesetzt wurde, irgendeine gegeben Relation zwischen diesen drei Größen x, y und p erfüllt wir, oder, nachdem irgendeine Gleichung zwischen diesen drei Größen vorgelegt wurde, so dass die Gestalt der Funktion y oder die Gleichung nur zwischen x und y, p ausgeschloßen, gefunden wird.

Korollar 3

§20 Die Fragen des zweiten Teils des ersten Buches werden aber so beschaffen sein, dass für $\frac{dy}{dx} = p, \frac{dp}{dx} = q, \frac{dp}{dy} = r$ etc. vorgelegt wird, die Gestalt der Funktion y durch x oder eine Gleichung zwischen x und y gefunden wird.

Bemerkung 1

§21 Die Dinge, die bis jetzt in der Integralrechnung ausgearbeitet worden sind, sind zum größten Teil zum ersten Teil des ersten Buches zuzählen, auf das Entwickeln von welchem die Geometre besonders ihre Mühe verwenden; es einige Dinge, die im zweiten Teil geleistet worden sind, und das andere Buch, welches wir zum zweiten machen, ist immer noch fast völlig leer zurückgelassen worden. Der erste Teil des ersten Buches, um welchem unsere Abhandlung hauptsächlich geht, wird erneuert in zwei Abschnitte für die Art der Relation unterteilt, die zwischen den Größen x,y und $p = \frac{dy}{dx}$ vorgelegt wird. Die Relation ist nämlich im Bezug auf die übrigen die einfache , wann immer $p = \frac{dy}{dx}$ einer gewissen Funktion von x gleich wird; nach setzen von dieser $= X$, dass $\frac{dy}{dx} = X$ oder $dy = Xdx$ ist, wird die ganze Aufgabe bei der Integration der Differentialformel Xdx absolviert; diese Operation haben wir schon ober erwähnt, die für gewöhnlich unter dem Titel der Integration von einfachen Differentialformeln oder solcher, die eine Variable involvieren, behandelt zu werden pflegt. Auf dasselbe ginge die Sache zurück, wenn $p = \frac{dy}{dx}$ einer Funktion nur von y gleich werden würde, weil ja die Größen x und y so zueinander in Beziehung stehen, dass die eine als Funktion der anderen betrachtet werden kann; diese Dinge werden also zum ersten Abschnitt gezähl. Wenn aber $p = \frac{dy}{dx}$ einem Ausdruck gleich wird, der die beiden Größen x und y involviert, hat man eine Differentialgleichung dieser Form $Pdx + Qdy = 0$, wo P und Q irgendwelche aus x, y und Konstante zusammengefügte Ausdrücke sind. Obwohl aber die Geometer sich viel bei der Integration von Gleichungen dieser Art abmühen, sind sie dennoch kaum weiter als gewisse ziemlich partikuläre fortgeschritten. Wenn also p komplizierter durch x und y bestimmt wird, dass sein Wert nicht explizit beschafft werden kann, wie wenn z.B.

$$p^5 = xxp^3 - xyp + x^5 - y^5$$

war, ist nicht einmal ein zu probierender Weg bekannt, wie daher die Relation zwischen x und y gefunden werden kann; die wenigen Dinge also, die sich hier angeben lassen werden, werden mit den vorher hergehen den zweiten Abschnitt des ersten Teils des ersten Buches einnehmen. So wird aus unserer ganzen Abhandlung mehr klar werden, was noch in der Integralrechnung vermischt wird, wie was schon erledigt ist, obwohl dieses in Bezug auf jenes als ein sehr kleiner Anteil zu betrachten ist.

BEMERKUNG 2

§22 Bei den einzelnen Teilen, welche wir aufgezählt haben, pflegt es auch zu geschehen, dass nicht nur eine gewisse Funktion, sondern zugleich mehrere untersucht werden, so dass keine ohne die übrigen bestimmt werden kann, so wie es in der gemeinen Algebra passiert, dass für die Lösung eines Problems mehrere Unbekannte in die Rechnung einzuführen sind, die darauf durch ebenso viele Gleichungen bestimmt werden. Wie wenn z.B. zwei Funktionen solcher Art y und z von x zu finden sind, dass

$$xdy + azzdx = 0 \quad \text{und} \quad xxdz + bxydy = cdy$$

ist, können daher neue Unterteilungen unserer Abhandlung festgelegt werden, aber weil hier wie in der gemeinen Algebra die ganze Aufgabe auf die Elimination eines Buchstaben zuück geführt wird, dass darauf nur zwei Variablen zu einer Gleichung übrig sind, scheut daher die Abhandlung nicht zu vermehren zu sein.

BEMERKUNG 3

§23 Zum zweiten Buch der Integralrechnung, in dem eine Funktion von zwei oder mehreren Variablen aus einer gegebenen Relation von Differentialen untersucht wird, findet eine um vieles größere Vielfalt der Frage statt. Es sei nämlich z eine Funktion der zwei Variablen x und t zu untersuchen, und weil

$\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right)$ das Verhältnis ihrer Differentiale zu dx bezeichnet,wenn allein x für die Variable gehalten wird, aber $\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}z}\right)$ das Verhältnis ihrer Differentiale zu dt, wenn allein t für die Variable genommen wird, wird der erste Teil Fragen solcher Art enthalten, in denen eine gewisse Relation zwischen der Größen x,t,z und $\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right)$, $\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)$ vorgelegt wird, und die Frage geht darauf zurück, dass daher eine Gleichung allein zwischen den Größen x,t und z gefunden wird; daher wird nämlich, was z für eine Funktion von x und t ist, klar werden. Im zweiten Teil werden außer dieser Formeln $\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right)$ und $\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)$ auch die $\left(\frac{\mathrm{dd}z}{\mathrm{d}x\mathrm{d}x}\right)$, $\left(\frac{\mathrm{dd}z}{\mathrm{d}x\mathrm{d}t}\right)$ und $\left(\frac{\mathrm{dd}z}{\mathrm{d}t\mathrm{d}t}\right)$ in die Rechnung eingehen, deren Beziehung so zu verstehen ist, dass, nachdem die erste $\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right) = p$ und $\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right) = q$ gesetzt worden sind, wo wiederum p und q gewisse Funktionen um x und t sein werden, auf die gleiche Ausdrucksweise

$$\left(\frac{\mathrm{dd}z}{\mathrm{d}x\mathrm{d}x}\right) = \left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\right), \quad \left(\frac{\mathrm{dd}z}{\mathrm{d}x\mathrm{d}t}\right) = \left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}\right) = \left(\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}x}\right), \quad \left(\frac{\mathrm{dd}z}{\mathrm{d}t\mathrm{d}t}\right) = \left(\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}\right)$$

sein wird. Nachdem also die Relation zwischen diesen Formeln und des vorhergehenden und zugleich der Größen x, t und z selbst fortgesetzt wurde, muss eine Gleichung zwischen diesen drei Größen x,t und z allein gefunden werden. Fragen dieser Art tauchen häufig in der Mechanik und Hydraulik auf, wann immer die Bewegung beweglichen und flüssigen Körper untersucht wird; daraus ist besonders zu wnschen, dass dieser andere Abschnitt des zweiten Buches der Integralrechnung mit allen Sorgfalt entwickelt wird. Und er wird in der Tat nicht nötig sein, dass wir diese Untersuchung auf frühere Differentiale ausdehnen, weil noch keine Fragen behandelt worden sind, die so grße Zuwächse der Rechnungen verlangen.

DEFINITION 5

§24 Wenn Funktionen, die in der Integralrechnung aus der Relation der Differentiale gesucht werden, welche algebraisch beschafft werden können, dann nennt man sie transzendent, weil ja deren Art über die Kräfte der gemeinen Analysis hinausgeht.

KOROLLAR 1

§25 Sooft also die Integration nicht gelingt, sooft ist die Funktion, die die Integration gesucht wird, für transzendent zu halten. Wenn so die Differentialformel $X\mathrm{d}x$ keine Integration zulässt, ist ihr Integral, welches so bezeichnet zu werden pflegt $\int X\mathrm{d}x$, eine transzendente Funktion von x.

KOROLLAR 2

§26 Daher setzt man ein, wenn y eine transzendente Funktion von x war, dass umgekehrt x ein transzendente Funktion von y sein wird und aus dieser Umkehrung entstehen nun transzendente Funktionen.

KOROLLAR 3

§27 Für die verschiedene Teile und Abschnitte der Integralrechnung entstehen auch viele Arten von transzendente Funktionen, deren Anzahl sogar ins Unendliche aufsteigt; daher ist klar, was für eine große Menge aller möglichen Größen uns noch unbekannt ist.

BEMERKUNG 1

§28 Schon bevor wir sie in der Analysis des Unendlichen betrachtet haben, ließen sich einige Gattungen von transzendenten Größen erkennen. Die erste liefert die Lehre der Logarithmen; wenn nämlich y den Logarithmus von x bezeichnet, dass $y = \ln(x)$ ist, wird y natürlich eine transzendente Funktion von x sein und so legen die Logarithmen quasi die erste Gatung von transzendenten Funktionen fest. Weil darauf aus der Gleichung $y = \ln(x)$ umgekehrt $x = \mathrm{e}^y$ ist, wird x natürlich auch eine transzendente Funktion von y sein und solche Funktionen werden exponentiale genannt. Weiter aber hat die Betrachtung der Winkel eine andere Art eröffnet; wie wenn z.B. der Winkel, dessen Sinus $\sin(t) = \varphi$ gesetzt wird, dass $t = \arcsin(\varphi)$ ist, besteht kein Zweifel, dass φ eine transzendente Funktion von s ist und freilich eine unendlich Formel; und weil daher auch Umkehrung $s = \sin(\varphi)$ hervorgeht, wird auch der Sinus s eine transzendente Funktion des Winkels φ ist. Obwohl aber diese transzendenten Funktionen ohne Hilfe der Integralrechnung erkannt worden sind, werden wir dennoch beim Anfang der Integralrechnung auf sie geführt und deren Gestalt ist uns schon so klar, dass sie fast als algebraische Funktionen angesehen werden können Daher pflegen wir sie auch immer in der Integralrechnung, sooft die dort gefundenen transzendenten Funktionen sich auf Logarithmen und Winkel zurückgühren lassen, als algebraisch zu betrachten.

BEMERKUNG 2

§29 Weil also die Integralrechnung dies der Inversion der Differentialrechnung entsteht, führt sie ins genauso wie die übrigen inversen Methoden zur Erkenntnis einer neuen Art von Größen. Wenn wir so vom *** der ersten Elemente nichts außer der Erkenntnis der positiven ganzen Zahlen verlangen, wird man, erhalten der Addition, wie man sofort auf die Inverse Operation, natürlich die Subtraktion geführt wird, natrürlich die Erkenntnis der negativen Zahlen erlangen. Darauf wird man nach Angaben der Multiplikation, wenn man zur Teilung fortschreitet, dort die Erkenntnis der Brüche erhalten. Nachdem weiter die Erhebung zur Potenz verteilt hatte, wenn man durch die inverse Operation das Ziehen von Wurzeln unternimmt, sooft die Aufgabe nicht gelingt, wird man eine Idee der irrationalen Zahlen bekommen und diese Erkenntnis, die ganze gemeine Analysis hindurch genïgend angesehen. Auf die gleiche Weise eröffnet die Integralrechnung; sofern die Integration nicht gelingt, und eine neue Art transzendenter Größen. Denn nicht, wie alle Differentiale von allen Funktionen beschafft werden können, lassen sich so umgekehrt Integrale aller Funktionen beschaffen.

BEMERKUNG 3

§30 Aber in der Tat sind nicht, sofort wie die erste Versuche beim Ausführender Integraion vergeblich waren, die gesuchten für transzendent zu halten; es pflegt nämlich oft zu geschehen, dass sogar ein algebraisches Integral durch viele Kknstfertige Operationen erhalten werden kann. Wann immer darauf die gesuchte Funktion transzendent war, ist natürlich zu sehen, ob sie vielleicht auf jene einfachsten Gattungen der Logarithmen oder Winkel zurückgeführt werden kann, in welchem die Lösung einer algebraischen gleichstellen wären. Wenn dies hingegen weniger gelang, musst dennoch die einfachste Form von transzendenten Größen, auf die sich die gesuchte zurc̈kführen lässt, untersucht werden. Für den nutzen am weit angenehmsten ist es aber, dass die Werte von transzendenten Funktionen in der Tat nḧerungsweise verschafft werden, für welches Ziel ein riesigen Teil der Integralrechnung auf die Untersuchung von unendlichen Reihen verwendet wird, die die Werte von denen

Funktionen enthalten.

THEOREM

§31 Alle durch ein Integral gefundenen Funktionen sind unbestimmt und erfordern eine Bestimmung, die aus der Natur der Frage, deren Lösung sie liefern, herzuholen.

BEWEIS

Weil immer unendlich viele Funktionen gegeben sind, die dasselbe Differential haben, weil freilich das Differential der Funktion $P + C$, welcher Wert auch immer der Konstante C zugeteil wird, dasselbe $= \mathrm{d}P$ ist, ist umgekehrt auch, nachdem das Differential $\mathrm{d}P$ vorgelegt wurde, das Integral $P + C$, wo sich für C irgendeine beliebige Konstante festlegen lässt; daher ist klar, dass die Funktion, denen Differential als $= \mathrm{d}P$ gegeben ist, unbestimmt ist weil sie eine beliebige konstante Größe in sich involviert. Es ist notwendig, dass dasselbe auch passiert, wenn die Funktion aus irgendeiner Relation der Differentiale zu bestimmen ist, und immer wird sie eine beliebige Konstante Größe umfassen, von welcher keine Spur in der Relation der Differentiale auftaucht. Es wird also eine durch die Integralrechnung gefundene Funktion dieser Art bestimmt werden, während jener beliebigen Konstante ein beliebiger Wert zugeteilt wird, welchen immer die Natur der Frage, deren Lösung auf jene Funktion geführt hatte, liefern wird.

KOROLLAR 1

§32 Wenn also die Funktion y von x aus der einer gewissen Relation der Differentiale bestimmt wird, kann sie durch die eingegangene beliebige Konstante so bestimmt werden, dass für $x = a$ gesetut $y = b$ wird; danach wird die Funktion bestimmt sein und für jeden x zugeteilten Wert wird die Funktion y einen bestimmten Wert erhalten.

KOROLLAR 2

§33 Wenn aus der Relation von Differentialen zweiten Grades die Funktion y bestimmt wird, wird sie zwei beliebige Konstante involvieren und lässt daher eine zweifache Bestimmung zu, durch die bewirkt werden kann, dass so für $x = a$ gesetzt nicht nur den gegebenen Wert erhält, sondern auch das Verhältnis $\frac{dy}{dx}$ einem gegebenen Wert c gleich wird.

KOROLLAR 3

§34 Wenn y eine aus der Relation der Differentiale gefundene Funktion der zwei Variablen x und t ist, wird sie auch eine beliebige Größe involvieren, durch deren Bestimmung bewirkt werden können wird, dass für $t = a$ gesetzt eine gegebene Gleichung zwischen y und x hervorgeht oder sie die Natur einer gewissen gegebenen Gleichung ausdrückt.

BEMERKUNG

§35 Diese Bestimmung der Integralfunktionen oder die durch die Integralrechnung gefunden worden sind, wird in jedem Fall aus der Natur der behandelten Frage leicht abgeleitet und bereitet keine Schwierigkeit, wenn nicht zufällig entgegen der Notwendigkeit die Lösung auf Differential gebracht worden war, obwohl sie durch die gemeine Analysis hätte gefunden werden können; in diesem Fall bringen sie genauso wie in der Algebra quasi unnütze Wurzeln ein. Weil aber diese Bestimmung nur bei der Anwendung auf bestimmte Fälle durchgeführt wird, werden wie hier, wo wir die Methode des Integrierens im Allgemeinen angeben, verschieden, die Integrale in der ganzen Weite zu finden, so dass die durch Integraion eingegangenen Konstanten beliebig bleiben, und werden, wenn nicht eine gewisse Bedingung es erzwingt, sie nicht bestimmen. Im Übringen ist die Bestimmung von Funktionen von x die einfachste, bei welcher sie im Fall $x = 0$ selbst verschwindend gemacht werden.

DEFINITION 6

§36 Ein vollständiges Integral wird gesagt beschafft zu werden, wann immer die Funktion in aller Ausdehnung mit einer beliebigen Konstante dargestellt wird. Wann immer aber diese Konstante schon auf eine bestimmte Weise bestimmt wurde, pflegt das Integral partkulär genannt zu werden.

KOROLLAR 1

§37 In jedem Fall ist also nur ein einziges vollständiges Integral gegeben; es können aber unendlich viele partkuläre Integrale beschafft werden. So ist das vollständige Integral des Differentials xdx $\frac{1}{2}xx + C$, die partikulären Integrale $\frac{1}{2}xx$, $\frac{1}{2}xx + 1$, $\frac{1}{2}xx + 2$ etc. sind eben in der Menge unendlich.

KOROLLAR 2

§38 Das vollständige Integral umfasst also alle partkulären Integrale in sich und aus ihm können diese alle nicht gebildet werden. Umgekehrt wird aber aus den partikulären Integralen das vollständige Integral nicht bekannt. Oftmals aber, wie schließlich klar werden wird, hat man eine Methode aus einem partikulären Integral das vollständige zu finden.

BEMERKUNG

§39 Es ist wiederum leicht ein partikuläres Integral durch eine Vermutung oder eine Eingebung zu erhalten. Wie wenn z.B. eine Funktion solcher Art von x, die y sei, gesucht wird, dass $dy + yydx = dx + xxdy$ ist, wird dieser Gleichung natürlich durch Nehmen von $y = x$ genügt, welches also ein partikuläres Integral ist, weil ja in ihm keine beliebige Konstante enthalten ist; aber das vollständige Integral wird als $y = \frac{1+Cx}{C+x}$ gefunden werden, was jenes partikuläres durch Nehmen von $C = \infty$ in sich enthält. Auf die gleiche Weise erhält man daher durch Nehmen von $C = 1$ ein anderes Integral $y = \frac{1}{x}$, was der oberen Gleichung genauso genügt wie das erste *** alle partikulärer Integrale, welche auch immer genügen, sie dieser allgemeinen Gleichung $y = \frac{1+Cx}{C+x}$ enthalten sind, ist notwendig, nachdem ob der beliebigen Konstante C die einen oder die anderen Werte zugeteilt werden ; so wird für $C = 1$ genommen auch $y = 1$. Es pflegt aber meistens zu geschehen, dass, auch wenn ein gewisse partikuläres Integral algebraisch ist, dennoch das vollständige transzendent ist. Wie wenn z.B. diese Gleichung $dy + ydx = dx + xdx$ vorgelegt ist, ist sofort klar, dass ihr für $y = x$ gesetzt genügt wird, welches also ein partikuläres Integral ist; aber das vollständige Integral, das die beliebige Konstante C involviert, ist $y = x + Ce^{-x}$, während e die Zahl bezeichnet, deren Logarithmus $= 1$ ist; wenn also hier nicht $C = 0$ genommen wird, ist die Funktion y immer transzendent.
Diese Dinge im Allgemeinen bemerkt zu haben, soll genügen, bevor wir die Behandlung der Integralrechnung selbst angehen, weil sie sich ja alle auf Integration beziehen; nun also, nachdem die Form der Abhandlung erläutert wurde, wollen wir zur zu behandelnden Arbeit vordringen.